

Table des matières

Notations	iv
Introduction	vii
1 Rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes	1
1.1 Méthode de Littlewood-Paley	1
1.2 Les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	3
1.3 Quelques inégalités	4
1.3.1 Quelques propriétés sur les espaces de Besov	4
1.4 Les espaces de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	9
1.4.1 Quelques propriétés fondamentales	10
1.5 Relation entre $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	11
1.6 Exemples	13
2 Les fonctions puissances	15
2.1 Etude de la fonction $f_\alpha(x) := x ^\alpha$	15
2.2 Etude de la fonction $f_\alpha(x) := \rho(x) x ^\alpha$	17
2.3 Etude de la fonction $f_{\alpha,\delta}(x) := g_\delta(x) x ^\alpha$	19
2.4 Etude de la fonction $f_{\alpha,\sigma}(x) := \log x ^\alpha (\log(\log x))^{-\sigma} \varphi(x)$	21
3 Application à la composition	23
3.1 Fonctions puissances	23
3.2 Fonctions puissances modifiées	24
3.3 Autres exemples	26

Bibliographie	27
----------------------	-----------

Notations

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée par $\partial^\alpha f$ ou $D^\alpha f$.

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx,$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi) f(\xi) d\xi.$$

- Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, alors $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .
- $f * g := \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y)dy$ est le produit de convolution des fonctions f et g .
- Soient A_1 et A_2 deux espaces de Banach, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que :

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \quad (\forall f \in A_1).$$

- p' est l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, $\text{supp } f$ est le support de f .
- E' est l'espace dual de E .
- $L^p(\mathbb{R}^n)$: est l'espace des fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions localement intégrable sur \mathbb{R}^n .
- $\ell^q(\mathbb{R}^n)$: est l'espace des suites $(a_k)_k$ telle que

$$\|(a_k)\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $\ell^q(L^p)$ désigne l'espace des suites $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient

$$\|\{f_k\}_k\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev telle que

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \leq m\}, \text{ avec}$$

$$\|f\|_{W_p^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|.$$

- Opérateurs de différences: $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$, $\Delta_h^1 := \Delta_h$ et $\Delta_h^{m+1} := \Delta_h \circ \Delta_h^m$,
et la formule d'ordre m est

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x-jh).$$

Introduction

Les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ sont obtenus à partir de la théorie de Littlewood-Paley, ils sont formés par la norme dans $l^q(\mathbb{N})$ des séries dans $L_p(\mathbb{R}^n)$, ils sont aussi l'interpolation des espaces de Sobolev.

Ces espaces ont plusieurs propriétés, d'interpolation, d'inclusion, des traces, ...etc, comme par exemples :

$$(B_{p,q_1}^{s_1}, B_{p,q_2}^{s_2})_{\theta,q} = B_{p,q}^s$$

pour $0 < \theta < 1$, $-\infty < s_1 \neq s_2 < \infty$, $1 \leq p, q_1, q_2, q \leq \infty$,

$$B_{p_1,q_1}^{s_1} \subset B_{p_2,q_2}^{s_2}$$

pour $s_1 > s_2$ et $s_1 - \frac{n}{p_1} \geq s_2 - \frac{n}{p_2}$.

Nous référons principalement aux livres de Triebel [[12], [13]] et Peetre [9] .

Certaines fonctions de l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ont des propriétés remarquables. À titre d'exemple les fonctions puissances $|x|^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et les fonctions puissances avec des singularités locales $|x|^\alpha (\log |x|)^\beta$ pour $|x|$ voisin de l'origine.

L'objet de ce mémoire sera donc d'étudier, à partir d'une étude bibliographique, les rôles des fonctions puissances dans les espaces de Besov.

Le premier chapitre nous rappelons les espaces de Besov homogènes et non homogènes dans lequel on va mentionner la méthode de Littlewood-Paley, quelques propriétés sur les espaces de Besov et les espaces de Besov homogènes et non homogènes.

Dans un deuxième chapitre, nous nous intéresserons aux fonctions puissances dans les espaces de Besov, où nous allons étudier la fonction $f_{\alpha,\delta} = g(x) |x|^\alpha$ où $g(x) = \rho(x)(-\log |x|)^{-\delta}$.

En dernier chapitre nous nous intéresserons à l'application à la composition dans les espaces de Besov.

Enfin, nous signalons que ce travail est basé sur l'article de G. bourdaud [4] et le livre de T.Runst et W.Sickel [10] . Mais cela n'a pas empêché l'utilisation d'autres références, comme par exemples Triebel [[12], [13]], Peetre [9] , Kateb [8], ...

Chapitre 1

Rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes

L'objectif de ce chapitre est de donner les définitions des bases des espaces de Besov homogènes et non homogènes, ainsi que quelques propriétés de ces espaces que nous aurons besoin par la suite.

1.1 Méthode de Littlewood-Paley

La décomposition de Littlewood-Paley est l'outil de base pour définir les espaces de Besov homogènes et non homogènes, nous allons la rappeler. Nous notons qu'il s'agit d'écrire une distribution tempérée quelconque sous forme d'une série convergente.

soit ρ une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive, radiale (ou paire) sur \mathbb{R}^n , et $0 \leq \rho \leq 1$, telle que

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On pose

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1.1 *Les deux fonctions ρ et γ seront fixées le long de ce mémoire.*

Nous avons alors $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

1. $\text{supp } \gamma \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\}.$
2. $\gamma(\xi) \geq 0$ pour $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}.$
3. $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$

Un calcul simple donne $\rho(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}\xi).$

Nous obtenons alors deux partitions de l'unité:

- partition non homogène est:

$$\rho(\xi) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1.1)$$

- partition homogène est:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.1.2)$$

Nous remarquons que si on change $2^{-j}\xi$ par $2^{-j-k}\xi$ dans la partition homogène, la somme ne changera pas aux partitions 1.1.1 et 1.1.2. A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions notés $Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $S_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, définis par

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &: = (\mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-j}\cdot)) * f)(x), \quad \forall j \geq 1, \\ S_k f(x) &: = (\mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-k}\cdot)) * f)(x), \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_j f)(\xi) &: = \gamma(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi), \quad \forall j \geq 1, \\ \mathcal{F}(S_k f)(\xi) &: = \rho(2^{-k}\xi) \hat{f}(\xi), \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

avec la notation: $Q_0 = S_0.$

Si dans la relation 1.1.1 on change ξ par $2^{-j}\xi$ et on multiplie par $\hat{f}(\xi)$ on obtient

$$\hat{f}(\xi) \rho(2^{-k}\xi) + \hat{f}(\xi) \sum_{j \geq k+1} \gamma(2^{-j}\xi) = \hat{f}(\xi). \quad (1.1.3)$$

En appliquant l'application \mathcal{F}^{-1} sur 1.1.3, on obtient

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = f. \quad (1.1.4)$$

Pour $k = 0$ on trouve

$$f = S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f.$$

Proposition 1.1.1 *Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), alors la décomposition de Littlewood-Paley de f est défini par:*

$$f = S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f.$$

Proposition 1.1.2 *Pour tout $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$), alors la décomposition de Littlewood-Paley de f est défini par:*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f.$$

Il est facile de montrer que:

$$S_k f = \sum_{j=0}^k Q_j f, \quad (\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \text{ ou } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)).$$

Remarque 1.1.2 *Grâce à l'inégalité de Young, les opérateurs S_k et Q_k sont bornés uniformément sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

1.2 Les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

Nous donnons dans cette partie les définitions de l'espace de Besov et quelques propriétés sur cet espace.

Définition 1.2.1 *Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, alors l'espace de Besov non homogène noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est défini par:*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} := \begin{cases} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{j \geq 0} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p \right) < +\infty, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.3 Quelques inégalités

Lemme 1.3.1 [Inégalité de Hölder] Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ telle que $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r})$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a $f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.3.1)$$

Lemme 1.3.2 [Inégalité de Young] Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.3.2)$$

Lemme 1.3.3 [Inégalité de Bernstein] Soient $1 \leq p \leq r \leq +\infty$ et $R > 0$. Alors il existe une constante $C = C(n, p, r) > 0$, telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\text{supp } \mathcal{F}f \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$$

on ait

$$\|f^{(\alpha)}\|_r \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|f\|_p, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (1.3.3)$$

Preuve. Pour la démonstration voir par exemple [3] ou [12, Remarque 1.4.1/4, p. 23].

Cependant les Lemmes 1.3.1 et 1.3.2 sont classiques. ■

1.3.1 Quelques propriétés sur les espaces de Besov

Proposition 1.3.1 Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{B_{p,q}^s})$ est un espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$.

(ii) $B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, (est l'espace de Hölder).

(iii) $B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, (est l'espace de Sobolev).

Preuve. voir [[12] , [13] et [10]]. ■

Proposition 1.3.2 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \text{ si } s > 0.$$

Preuve. Voir [1] et [9]. ■

Théorème 1.3.1 Soient $1 \leq p, q < \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.3.3 L'opérateur de dérivation ∂^α , envoie l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.
De plus, pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|\partial^\alpha f\|_{B_{p,q}^{s-1}} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}. \quad (1.3.4)$$

Preuve. Par l'inégalité de Bernstein on a

$$\|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p \leq c 2^{j|\alpha|} \|Q_j f\|_p.$$

En passant à la norme dans $B_{p,q}^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$; on obtient

$$\left(\sum_{j \geq 0} (2^{j(s-|\alpha|)q} \|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p^q) \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_0 \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où l'inégalité 1.3.4. ■

Théorème 1.3.2 Soient $1 \leq p, r, q \leq \infty$, et $s \in \mathbb{R}$.

Si $s > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$ ou $s = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$ et $q = 1$, alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Comme $L^r(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $f = \sum_{j \geq 0} Q_j f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ donc

$$\|f\|_r \leq \sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_r, \quad \text{car } r \geq 1,$$

d'après l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\sum_{j \geq 0} \|f\|_r \leq c \sum_{j \geq 0} 2^{jn(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|Q_j f\|_p.$$

On peut aussi écrire:

$$c \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})n} \|Q_j f\|_p = c \sum_{j \geq 0} 2^{j(n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) - s)} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p \right),$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$c \sum_{j \geq 0} 2^{j(n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) - s)} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p \right) \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j(n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) - s)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{js} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

par conséquent

$$c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} - s)} \right) (2^{js} \|Q_j f\|_p) \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} - s)q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

car $\sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} - s)q'}$ converge si $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} - s < 0$, ou $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} - s = 0$ et $q = 1$ donc

$$\|f\|_r \leq c' \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

■

Proposition 1.3.4 .

1. Si $s \in \mathbb{R}$, tels que $s > t$, et $1 \leq p, q \leq \infty$, alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^t(\mathbb{R}^n).$$

2. Si $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, alors

$$B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n).$$

3. Si $s, t \in \mathbb{R}$, tels que $s > t$, et $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, et $s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}$ alors

$$B_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_2,q}^t(\mathbb{R}^n).$$

4. Si $s \in \mathbb{R}$, et $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, tel que $\frac{n}{p} - s < 0$, alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty.$$

Preuve. On va montrer que,

1. Soit $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}$ converge. On a $s > t$, alors $2^{tj} < 2^{sj}$, donc

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{tjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

et on a $\|f\|_{B_{p,q}^s} < \infty$, ce qui donne $f \in B_{p,q}^t(\mathbb{R}^n)$ donc on trouve

$$\|f\|_{B_{p,q}^t} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

2. D'après l'inégalité de Bernstein on a

$$\|Q_j f\|_r \leq c 2^{jn(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|Q_j f\|_p, \quad r \geq p.$$

On pose $r = p_2$, $p = p_1$, donc

$$\|Q_j f\|_{p_2} \leq c 2^{jn(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})} \|Q_j f\|_{p_1},$$

alors

$$\begin{aligned} 2^{js_2} \|Q_j f\|_{p_2} &\leq c 2^{j(s_2 - s_1 + n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}))} 2^{js_1} \|Q_j f\|_{p_1} \\ &\leq c 2^{jn(s_2 + n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) - s_1)} 2^{js_1} \|Q_j f\|_{p_1} \\ &\leq c 2^{j(s_2 + n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) - s_1)} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{js_1 q_1} \|Q_j f\|_{p_1}^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{js_2 q_2} \|Q_j f\|_{p_2}^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j(s_2 + n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) - s_1) q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \|f\|_{B_{p_1, q_1}^{s_1}},$$

et on a la série $\sum_{j \geq 0} 2^{jn(s_2 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - s_1) q_2}$ converge si $s_2 + n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) - s_1 < 0$, donc on obtient

$$\|f\|_{B_{p_2, q_2}^{s_2}} \leq c \|f\|_{B_{p_1, q_1}^{s_1}}.$$

3. D'après l'inégalité de Bernstein, on a

$$\|Q_j f\|_r \leq c 2^{jn(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|Q_j f\|_p, \quad r \geq p,$$

car $\text{supp } \widehat{Q_j f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c2^j\}$. On pose $r = p_2, p = p_1$

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|_{p_2} &\leq c 2^{j\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}\right)} \|Q_j f\|_{p_1} \\ &\leq c 2^{j\left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)} 2^{js} \|Q_j f\|_{p_1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{j t q} \|Q_j f\|_{p_2}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c 2^{j\left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j s q} \|Q_j f\|_{p_1}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

donc

$$\|f\|_{B_{p_2, q}^t} \leq c \|f\|_{B_{p_1, q}^s},$$

car $2^{j\left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)} \leq 1$, si $t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s \leq 0$, ce qui implique $t - \frac{n}{p_2} \leq s - \frac{n}{p_1}$.

4. Comme $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $f = \sum_{j \geq 0} Q_j f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ donc

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq \sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_\infty \\ &\leq c \sum_{j \geq 0} 2^{j \frac{n}{p}} \|Q_j f\|_p \quad (\text{inégalité de Bernstein}) \\ &\leq c \sum_{j \geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p} - s\right)} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p \right) \\ &\leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p} - s\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{qjs} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{inégalité de Hölder}) \\ &\leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p} - s\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_{B_{p, q}^s}, \end{aligned}$$

et la série $\left(\sum_{j \geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p} - s\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}}$ converge, si $\frac{n}{p} - s < 0$ (c'est-à-dire, $\frac{n}{p} < s$), donc

$$\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{B_{p, q}^s}.$$

■

Théorème 1.3.3 [Inégalité de Gagliardo-Nirenberg]

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ et $0 < \theta < 1$. Alors on a

$$B_{p\theta, \theta q}^{\frac{s}{\theta}}(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\|f\|_{B_{p, q}^s} \leq c \|f\|_\infty^{1-\theta} \|f\|_{B_{p\theta, \theta q}^{\frac{s}{\theta}}}^\theta.$$

Preuve. On part de cette inégalité

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_\infty^{1-\theta} \|f\|_{\theta p}^\theta,$$

et on applique cette formule à $Q_j f$

$$\|Q_j f\|_p \leq c \|Q_j f\|_\infty^{1-\theta} \|Q_j f\|_{\theta p}^\theta, \quad (1.3.5)$$

et par l'hypothèse $\|Q_j f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty$, on a

$$\|Q_j f\|_p \leq c \|f\|_\infty^{1-\theta} \|Q_j f\|_{\theta p}^\theta, \quad (1.3.6)$$

on a alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} (\|f\|_\infty^{1-\theta} \|Q_j f\|_{\theta p}^\theta)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui implique

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_\infty^{1-\theta} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|Q_j f\|_{\theta p}^{\theta q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent, on a

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_\infty^{1-\theta} \|f\|_{B_{p,q\theta}^{\frac{s}{\theta}}}^\theta.$$

■

1.4 Les espaces de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

On note par $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tout les polynômes dans \mathbb{R}^n , et par $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\langle f, u \rangle = 0, \forall u \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx = 0, \quad \forall u \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

On pose alors $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace dual de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes, i.e.

$$\forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) : |\langle f, \varphi \rangle| < +\infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.4.1 Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Besov homogène noté $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} := \begin{cases} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \text{pour } q \neq \infty \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_p \right) < +\infty, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.4.1 Quelques propriétés fondamentales

Les propriétés suivantes sont vérifiées, voir par exemple [5],[6].

- (i) $(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s})$ est un espace de Banach si $p, q \geq 1$.
- (ii) $\dot{B}_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$ si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ est l'espace de Hölder homogène.
- (iii) $\dot{B}_{p,q}^m(\mathbb{R}^n) = \dot{\mathcal{W}}_p^m(\mathbb{R}^n)$, $\forall m \in \mathbb{N}$ est l'espace de Sobolev homogène.

Proposition 1.4.1 On a

1. Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, alors

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

- 2 . Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, alors

$$\dot{B}_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n).$$

3. Soient $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, telle que $s_1 < s_2$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ avec $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, alors

$$\dot{B}_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p_2,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [5] . ■

Théorème 1.4.1 (Nikol'skii) Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 < p, q \leq \infty$. Soient a, b des réels tel que $0 < a < b$. Soit $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $\text{supp } \hat{u}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a2^j \leq |\xi| \leq b2^j\}$.
- $A := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sjq} \|u_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$.

Alors la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \right\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq cA,$$

où c dépend uniquement de s, p, q, a, b et n .

Preuve. Voir [6]. ■

Proposition 1.4.2 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Il existe deux constantes $c_2, c_1 > 0$, telle que

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s},$$

pour tout $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$.

Preuve. Voir [5] et [10] pour les cas non homogènes. ■

1.5 Relation entre $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

Il existe un lien de passage entre les espaces de Besov homogènes et non homogènes, au moins pour $s > 0$, c'est le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \geq 0$. Alors $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, on a $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$; de plus il existe $c_1, c_2 > 0$ telle que

$$c_1 \|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c_2 \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad \forall f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. a) Soit $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^s} &= \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \end{aligned}$$

donc

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}. \quad (1.5.1)$$

b) Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que $\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty$ et par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left\| \sum_{j \geq 0} Q_j f \right\|_p \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_p \right) 2^{-sj} \\ &\leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{qsj} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \|f\|_{B_{p,q}^s} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

et la série $\sum_{j \geq 0} 2^{-sjq'}$ converge si $s > 0$, donc

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad (1.5.2)$$

et

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{qsj} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{qsj} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j \leq 0} 2^{qsj} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{B_{p,q}^s} + c_1 \|f\|_p \left(\sum_{j \leq 0} 2^{qsj} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{car: } \|Q_j f\|_p \leq c \|f\|_p), \\ &\leq \|f\|_{B_{p,q}^s} + c_2 \|f\|_p \quad (\text{car: } \left(\sum_{j \leq 0} 2^{qsj} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \text{ si } s > 0) \\ &\leq \|f\|_{B_{p,q}^s} + c_3 \|f\|_{B_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c_4 \|f\|_{B_{p,q}^s}. \quad (1.5.3)$$

de (1.5.2) et (1.5.3) on a

$$\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq c' \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad (1.5.4)$$

de (1.5.1) et (1.5.4) on a

$$\frac{1}{c'} \left(\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \right) \leq \|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}.$$

Alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \sim \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}.$$

■

Remarque 1.5.1 Le théorème 1.5.1 a une forme plus générale quand $0 < p, q \leq \infty$, c'est avec la condition

$$s > \max\left(\frac{n}{p} - n, 0\right);$$

nous référons au [13] pour plus de détails.

1.6 Exemples

Exemple 1.6.1 Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors par l'inégalité $\|Q_j f\|_p \leq c 2^{-jN}$, pour $j \geq 0$ et $\forall N \in \mathbb{N}$, alors $f(x) = e^{-|x|^2} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. En effet,

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|_p &\leq c 2^{-jN} & \forall N \in \mathbb{N}, j \geq 0 \\ 2^{js} \left\| Q_j e^{-|x|^2} \right\|_p &\leq c 2^{-nj(N-s)} \\ \left(\sum_{j \geq 0} \left(2^{js} \left\| Q_j e^{-|x|^2} \right\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j \geq 0} c 2^{-nj(N-s)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left\| e^{-|x|^2} \right\|_{B_{p,q}^s} &\leq \left(\sum_{j \geq 0} c 2^{-nj(N-s)q} \right)^{\frac{1}{q}} \text{ avec } |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$

et on a la série $\sum_{j \geq 0} c 2^{-nj(N-s)q}$ converge si $N - s > 0$, alors $e^{-|x|^2} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.6.2 On a $f := \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (où δ est la masse de Dirac). En effet,

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= 2^j \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x-y)) f(y) dy \\ &= 2^j \langle f, \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x-.)) \rangle, \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} Q_j \delta &= 2^j \langle \delta, \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x-.)) \rangle \\ &= 2 \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x-0)) \\ &= 2^j \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|Q_j \delta\|_p &= 2^j \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{j(1-\frac{1}{p})} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1} \gamma(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{j(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{F}^{-1} \gamma\|_p, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|Q_j \delta\|_p \leq c 2^{j(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \|Q_j \delta\|_p &\leq c 2^{j(1-\frac{1}{p})} \\ 2^{sj} \|Q_j \delta\|_p &\leq c 2^{(s+1-\frac{1}{p})j} \\ \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|Q_j \delta\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{(s+1-\frac{1}{p})qj} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

d'où la série $\sum_{j \geq 0} 2^{(s+1-\frac{1}{p})qj}$ converge dans les cas suivants:

- Si $s + \left(1 - \frac{1}{p}\right) < 0 \implies s < \frac{1}{p} - 1$, alors $\delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$,
- Si $s + \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$ et $q = \infty$, c'est-à-dire $s = \frac{1}{p} - 1$ et $q = \infty$, alors on a

$$\begin{aligned} 2^{sj} \|Q_j \delta\|_p &\leq \sup_{j \geq 0} 2^{sj} \|Q_j \delta\|_p \\ &= \|\delta\|_{B_{p,\infty}^s}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si } s < \left(\frac{1}{p} - 1\right), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q < \infty, \\ \delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si } s = \left(\frac{1}{p} - 1\right), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad q = \infty. \end{cases}$$

Si $n \geq 2$ on a les résultats

$$\begin{cases} \delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si } s < n \left(\frac{1}{p} - 1\right), \\ \delta \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si } s = n \left(\frac{1}{p} - 1\right). \end{cases}$$

Chapitre 2

Les fonctions puissances

Nous allons étudier la fonction $f_\alpha(x) = g(x)|x|^\alpha$ où dans un premier cas $g(x) = 1$ et en deuxième cas nous prendrons $g_\delta(x) = \rho(x)(-\log|x|)^{-\delta}$ avec $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ et ρ est défini au chapitre précédent.

Dans le cas où $g_\delta(x)$ on a une singularité local en $x = 0$.

2.1 Etude de la fonction $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$

Dans cette section, nous examinons l'appartenance de la fonction $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$ dans l'espace de Besov.

Proposition 2.1.1 *On peut remplacer dans la Definition 1.2.1 la fonction γ par une autre fonction $\tilde{\gamma}$ de même type, c'est-à-dire, $\tilde{\gamma} \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \notin \text{supp } \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}$ paire et radiale .*

Preuve. Soit $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$, alors $\widehat{f_\alpha}(\xi) = c|\xi|^{-n-\alpha}$ en effet ■

comme $f_\alpha(\lambda x) = \lambda^\alpha |x|^\alpha = \lambda^\alpha f_\alpha(x), \forall \lambda > 0$

alors on a

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_\alpha(\zeta) &= \int e^{-ix\zeta} |x|^\alpha dx \\
 &= \lambda^{n+\alpha} \int e^{-i\lambda y\zeta} |y|^\alpha dy, \quad \begin{cases} x &:= \lambda y \\ dx &:= \lambda^n dy \end{cases} \\
 &= \lambda^{n+\alpha} \hat{f}_\alpha(\lambda\zeta) \quad (\forall \lambda > 0).
 \end{aligned}$$

Choisissons $\lambda = \frac{1}{|\zeta|}$ on obtient

$$\hat{f}_\alpha(\zeta) = c_0 |\zeta|^{-n-\alpha};$$

Pour justifier l'existence de $c_0 \in \mathbb{R}$, on a f est une fonction radiale, donc \hat{f} est aussi, c-à-d

$$\hat{f}_\alpha(\zeta) = g(|\zeta|),$$

avec $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $g(\frac{\xi}{|\xi|}) = g(1) = c_0$.

On a

$$\begin{aligned}
 \widehat{Q_j f_\alpha}(\xi) &= c |\xi|^{-n-\alpha} (\gamma 2^{-j} \xi) \\
 &= c 2^{-j(\alpha+n)} (|2^{-j} \xi|^{-\alpha-n} \gamma(2^{-j} \xi)).
 \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{\gamma}(\xi) = |\xi|^{-n-\alpha} \gamma(\xi).$$

Donc

$$\widehat{Q_j f_\alpha}(\xi) = c 2^{-j(\alpha+n)} \tilde{\gamma}(2^{-j} \xi),$$

On trouve

$$\begin{aligned}
 Q_j f(x) &= c 2^{-j(\alpha+n)} \mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^{-j} x) 2^{jn} \\
 &= c 2^{-j\alpha} \mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^{-j} x).
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|_p &= c 2^{-j\alpha} \|\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^{-j} \cdot)\|_p \\ &= c 2^{-j(\alpha+n)} \|\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}\|_p \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Ce qui donne

$$2^{j(\alpha+n)} \|Q_j f\|_p = c \|\mathcal{F}^{-1} \tilde{\gamma}(2^{-j} \cdot)\|_p = c'.$$

On passe au $\sup_{j \in \mathbb{Z}}$, on trouve

$$\begin{cases} \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\alpha+n}} < +\infty \\ \sup_{j \geq 0} B_{p,\infty}^{\alpha+n}(\mathbb{R}^n) < +\infty \end{cases}.$$

D'après la proposition 2.1.1 on obtient

$$\|Q_j f\|_p = c' 2^{j(s-\alpha-n)}.$$

Si $j \geq 0$ et $s - \alpha - n < 0$, alors

$$\left(\sum_{j \geq 0} (2^{js} \|Q_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Donc

$$\begin{aligned} f &\in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si} & \quad s < \alpha + n, \\ f &\in B_{p,\infty}^{\alpha+n}(\mathbb{R}^n) & \text{si} & \quad s = \alpha + n. \end{aligned}$$

2.2 Etude de la fonction $f_\alpha(x) := \rho(x) |x|^\alpha$

Dans cette section, nous allons étudier la fonction $f_\alpha(x) := \rho(x) |x|^\alpha$ dans l'espace de Besov non homogène où la fonction ρ est définie dans le chapitre 1 (section 1.1). Sa démonstration existe dans la référence [10].

Proposition 2.2.1 *Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{N}$ telle que $M > s > (0, n/p - n)_+$. Si $f \in L^p$, alors la norme*

$$\|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \|\Delta_h^M f\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

est une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [13]. ■

Théorème 2.2.1 ([10]) *Soient $s > 0$ et $\alpha \neq 0$. Alors*

$$f_\alpha \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \text{ si et seulement si } s < \frac{n}{p} + \alpha \text{ ou } s = \frac{n}{p} + \alpha \text{ et } q = \infty \quad (2.2.1)$$

Remarque 2.2.1 *Le théorème 2.2.1 ainsi que sa démonstration suivante sont dûs à Runst et Sickel [10]*

Preuve. Etape 1. Condition suffisante. Soit $M \in \mathbb{N}$, un nombre entier assez grand. Soit $M \cdot |h| < \frac{1}{4}$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 2M|h|} |\Delta_h^M f_\alpha(x)|^p dx &\leq c \int_0^{3M|h|} r^{\alpha p} r^{n-1} dr \\ &\leq c |h|^{\alpha p + n}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

avec c est indépendant de h . En utilisant l'inégalité

$$|\Delta_h^M f_\alpha(x)| \leq c |h|^M \max_{|\gamma|=M} \sup_{|x-y| \leq |h|M} |D^\gamma f_\alpha(y)|. \quad (2.2.3)$$

Si $0 \notin \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq |h|M\}$ et

$$|D^\gamma f_\alpha(x)| \leq c |x|^{\alpha-M}, \quad |\gamma| = M \geq 1.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{|x| > 2M|h|} |\Delta_h^M f_\alpha(x)|^p dx \\ &\leq c \sum_{j=1}^{j_0} \int_{2^{j-1}M|h|}^{2^j M|h|} |h|^{Mp} (jM|h|)^{(\alpha-M)p} r^{n-1} dr \\ &\leq c |h|^{\alpha p + n} \sum_{j=1}^{j_0} j^{n-1+(\alpha-M)p}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

où j_0 est défini comme le plus petit entier tel que

$$2(j_0 + 1)M|h| > 3/2. \quad (2.2.5)$$

Puisque $|h| \leq \varepsilon$, et on suppose que $2(j_0 + 1)M|h| < \frac{1}{2}$ pour $\varepsilon > 0$. Donc

$$\sum_{j=1}^{j_0} j^{n-1+(\alpha-M)p} \leq C. \quad (2.2.6)$$

D'après 2.2.4 et 2.2.6, on trouve

$$\int_{|x|>2M|h|} |\Delta_h^M f_\alpha(x)|^p dx \leq C |h|^{\alpha p+n}. \quad (2.2.7)$$

En conséquence, 2.2.2 et 2.2.7 donne

$$\int_{|h|<\varepsilon} |h|^{-(\frac{n}{p}+\alpha)q} \|\Delta_h^M f_\alpha\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \leq C \int_0^\varepsilon r^{-1} dr < \infty.$$

Etape 2. Condition nécessaire. De même si $s = \frac{n}{p} + \alpha$. A partir de $f_\alpha \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, il existe $r > 0$ telle que

$$f_\alpha \in B_{r,q}^{s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(\mathbb{R}^n), \quad \max(1,p) < r < \infty, \quad 0 < s - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) < 1,$$

et en utilisant la Proposition 1.3.3. D'après la Proposition précédente, la norme de l'espace de $B_{r,q}^{s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(\mathbb{R}^n)$ est bornée par

$$\left(\int_{|h|\leq\varepsilon} |h|^{-(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})q} \|\Delta_h^1 f_\alpha\|_r^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.2.8)$$

En appliquant l'inégalité

$$||x|^\alpha - |x+h|^\alpha| > c|h|^\alpha,$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \geq 0$, $h_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ et $|x| \leq \frac{|h|}{M} < h_0$, pour tout $c > 0$ et tout $M > 0$ on obtient

$$\int_{|h|<\varepsilon} |h|^{-(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})q} \|\Delta_h^1 f_\alpha\|_r^q \frac{dh}{|h|^n} \geq \int_0^{r_0} \frac{dt}{t} = \infty.$$

On observant 2.2.8 ceci vérifiée $f_\alpha \notin B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. ■

2.3 Etude de la fonction $f_{\alpha,\delta}(x) := g_\delta(x) |x|^\alpha$

Nous allons étudier la fonction $f_{\alpha,\delta}(x) := g_\delta(x) |x|^\alpha$ telle que $g_\delta(x) := \rho(x)(-\log|x|)^{-\delta}$ dans l'espace de Besov.

Théorème 2.3.1 Soient $s > 0$ et $\alpha \neq 0$. Si $\delta > 0$, alors

$$f_{\alpha,\delta} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{si et seulement si} \quad s < \frac{n}{p} + \alpha \quad \text{ou} \quad s = \frac{n}{p} + \alpha \quad \text{et} \quad q\delta > 1. \quad (2.3.1)$$

Remarque 2.3.1 Comme dans la remaque 2.2.1, le théorème 2.3.1 ainsi que sa preuve sont dûe à Runst et Sickel [10].

Preuve. Etape 1. Condition suffisante. Soit $\delta > 0$ et M un nombre entier assez grand. Soit $M \cdot |h| < \frac{1}{4}$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 2M|h|} |\Delta_h^M f_{\alpha,\delta}(x)|^p dx &\leq c \int_0^{3M|h|} r^{\alpha p} r^{n-1} (-\log r)^{-\delta p} dr \\ &\leq c |h|^{\alpha p+n} (-\log |h|)^{-\delta p}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

avec c est indépendant de h . En utilisant l'inégalité

$$|\Delta_h^M f_{\alpha,\delta}(x)| \leq c |h|^M \max_{|\gamma|=M} \sup_{|x-y| \leq |h|M} |D^\gamma f_{\alpha,\delta}(y)|.$$

Si $0 \notin \{y : |x-y| \leq |h|M\}$ et

$$|D^\gamma f_{\alpha,\delta}(x)| \leq c |x|^{\alpha-M} (-\log |h|)^{-\delta}, \quad |\gamma| = M \geq 1.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} \int_{|x| > 2M|h|} |\Delta_h^M f_{\alpha,\delta}(x)|^p dx &\leq c \sum_{j=1}^{j_0} \int_{2jM|h|}^{2(j+1)M|h|} |h|^{Mp} (jM|h|)^{(\alpha-M)p} |\log(jM|h|)|^{-\delta p} r^{n-1} dr \\ &\leq c |h|^{\alpha p+n} \sum_{j=1}^{j_0} j^{n-1+(\alpha-M)p} |\log(jM|h|)|^{-\delta p}, \end{aligned}$$

avec j_0 est définie comme le plus petite entier telle que

$$2(j_0 + 1)M|h| > 3/2,$$

puisque $|h| \leq \varepsilon$ nous pouvons supposer $2(j_0 + 1)M|h| < \frac{1}{2}$ pour $\varepsilon > 0$. Donc

$$\sum_{j=1}^{j_0} j^{n-1+(\alpha-M)p} |\log(jM|h|)|^{-\delta p} \leq C |\log |h||^{-\delta p}, \quad (2.3.3)$$

Pour M assez grand, encore c est indépendant de h . D'après 2.2.4 et 2.2.6, on trouve que

$$\int_{|x| > 2M|h|} |\Delta_h^M f_{\alpha,\delta}(x)|^p dx \leq C |h|^{\alpha p+n} (-\log |h|)^{-\delta p}. \quad (2.3.4)$$

En conséquence, 2.3.2 et 2.3.4 prouvent que

$$\int_{|h| < \varepsilon} |h|^{-(\frac{n}{p} + \alpha)q} \|\Delta_h^M f_{\alpha,\delta}\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \leq C \int_0^\varepsilon r^{-1} |\log r|^{-\delta p} dr < \infty$$

Si $\delta q > 1$, la même démonstration.

Etape 2. Condition nécessaire.. Nous travaillons encore avec $\delta > 0$. Soit $s = \frac{n}{p} + \alpha$. A partir de $f_{\alpha,\delta} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, nous dérivons l'existence de certains $r > 0$ telle que

$$f_{\alpha,\delta} \in B_{r,q}^{s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(\mathbb{R}^n), \quad \max(1,p) < r < \infty, \quad 0 < s - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) < 1.$$

et en utilisant la Proposition 1.3.3. D'après la Proposition précédente, la norme de l'espace de $B_{r,q}^{s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(\mathbb{R}^n)$ est borné par

$$\left(\int_{|h| \leq \varepsilon} |h|^{-(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})q} \|\Delta_h^1 f_{\alpha,\delta}\|_r^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.3.5)$$

En appliquant l'inégalité

$$||x|^\alpha (-\log |x|)^{-\delta} - |x+h|^\alpha (-\log |x+h|)^{-\delta}| > c |h|^\alpha (-\log |h|)^{-\delta}.$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \geq 0$, $h_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ et $|x| \leq \frac{|h|}{M} < h_0$ pour tout $c > 0$ et tout $M > 0$, on obtient

$$\int_{|h| < \varepsilon} |h|^{-(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})q} \|\Delta_h^1 f_{\alpha,\delta}\|_r^q \frac{dh}{|h|^n} \geq \int_0^{r_0} (-\log t)^{-\delta q} \frac{dt}{t} = \infty.$$

On observant 2.3.5 ceci vérifiée $f_{\alpha,\delta} \notin B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Ceci termine la preuve du théorème. ■

2.4 Etude de la fonction $f_{\alpha,\sigma}(x) := |\log |x||^\alpha (\log(\log |x|))^{-\sigma} \varphi(|x|)$

Soit la fonction ϕ de classe C^∞ sur \mathbb{R} telle que $\phi(x) = 1$ pour $x \leq e^{-3}$ et $\phi(x) = 0$ pour $x \geq e^{-2}$. For $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction f sur \mathbb{R}^n par

$$f_{\alpha,\sigma}(x) := |\log |x||^\alpha (\log(\log |x|))^{-\sigma} \phi(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4.1)$$

Le théorème suivant est donné par G. Bourdaud voir [4, Prop. 2]. Soit U_q est l'ensemble de $(\alpha, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ telle que:

- $\alpha = 1 - 1/q$ et $\sigma > 1/q$, ou $\alpha < 1 - 1/q$, dans le cas $1 < q < \infty$,
- $\alpha = 0$ et $\sigma > 0$, ou $\alpha < 0$, dans le cas $q = 1$,
- $\alpha = 1$ et $\sigma \geq 0$, ou $\alpha < 1$, dans le cas $q = \infty$.

Proposition 2.4.1 *Soient $(\alpha, \sigma) \in \mathbb{R}^2$. Alors la transformée de Fourier de la fonction $f_{\alpha,\sigma}$ est indéfiniment différentiable sur \mathbb{R}^n et satisfait*

$$\Delta^k(\widehat{f})(\xi) = O(|\xi|^{-n-2k}(\log |\xi|)^{\alpha-1}(\log(\log |\xi|))^{-\sigma}),$$

quand $|\xi| \rightarrow \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans le cas $\alpha = 0$, l'estimation ci-dessus peut être améliorée comme suit:

$$\Delta^k(\widehat{f})(\xi) = O(|\xi|^{-n-2k}(\log |\xi|)^{-1}(\log(\log |\xi|))^{-\sigma-1}).$$

Preuve. Voir [4, Prop. 1]. ■

Théorème 2.4.1 *Si $1 \leq p, q \leq +\infty$, alors $f_{\alpha,\sigma} \in B_{p,q}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $(\alpha, \sigma) \in U_q$.*

Preuve. Voir [4, Prop. 1]. ■

Chapitre 3

Application à la composition

Nous rappelons quelques résultats dûs à G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel [5], D. Kateb [8], G. Bourdaud, Y. Meyer [2] dans le cas $\mu = 1$ et $0 < s < \mu + \frac{1}{p}$ et G. Bourdaud [3], W. Sickel [11] dans le cas $\mu < 1$ et quelques exemples de fonctions puissances qui opèrent par composition dans les espaces de Besov non homogène et de Sobolev. Nous allons étudier l'opérateur $T_f : g \mapsto f \circ g$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et en cas particulier, on donne quelques propriétés sur l'opérateur $f \mapsto |f|^\mu$.

3.1 Fonctions puissances

Nous rappelons que la valeur absolue a été étudiée par G. Bourdaud et Y. Meyer, voir [2]

Théorème 3.1.1 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\mu > 1$. Supposons que*

$$m < \mu + \frac{1}{p}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| |f|^\mu \|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \|f\|_\infty^{\mu-1},$$

pour tout $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [8]. ■

Dans le cas de l'espace de Besov nous avons le résultat suivant:

Théorème 3.1.2 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$. Soient $\mu > 1$ et $0 < s < \mu + \frac{1}{p}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| |f|^\mu \|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \|f\|_\infty^{\mu-1},$$

pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir aussi [8]. ■

Théorème 3.1.3 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, et $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| |f| \|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [2]. ■

Théorème 3.1.4 Soient $0 < \mu < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| |f|^\mu \|_{B_{p,q}^{s\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\mu,$$

pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

Preuve. voir [10]. ■

3.2 Fonctions puissances modifiées

Définition 3.2.1 Si E est un espace de distributions dans \mathbb{R}^n , on appelle E_{loc} l'ensemble des distributions $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, on introduit l'ensemble :

$$J_p := \begin{cases} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{p} - \frac{3}{4}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{p} - \frac{3}{4}} \right] & \text{si } p \leq \frac{4}{3}, \\ \emptyset & \text{si } p > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Exemple 3.2.1 Supposons que $\mu > 1$ et $\mu \notin 2\mathbb{N}$, et on définit

$$f_\mu(t) := |t|^\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soient $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. Alors $f_\mu \in B_{p,q}^{s,loc}(\mathbb{R})$ si et seulement si $s < \mu + \frac{1}{p}$ ou $s = \mu + \frac{1}{p}$ et $q = \infty$ voir par exemple [10, 2.3.1]. Donc on conclut que

$$\| |g|^\mu \|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}^\mu, \quad \forall g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}). \quad (3.2.1)$$

avec la constante c indépendant de la fonction g , s et p :

$$\frac{1}{p} < s - [s] \quad \text{et} \quad 1 < p \leq q(s - [s] - \frac{1}{p} + 1),$$

ou

$$s - [s] \leq \frac{1}{p}, \quad 1 < p \leq q(s - [s] - \frac{1}{p} + 2) \quad \text{et} \quad s - [s] + 1 - \frac{1}{p} \notin J_p,$$

si $s \leq \mu + \frac{1}{p}$. En outre, nous avons le cas suivant

$$\| |g|^\mu \|_{B_{p,\infty}^{\mu+\frac{1}{p}}(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,\infty}^{\mu+\frac{1}{p}}(\mathbb{R})}^\mu, \quad \forall g \in B_{p,\infty}^{\mu+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}). \quad (3.2.2)$$

Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus par Kateb [8] et [10]. Des résultats complémentaires sont obtenus si la fonction f_μ est remplacée par

$$\tilde{f}_\mu(t) := t |t|^{\mu-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ou

$$\bar{f}_\mu(t) := (\max(t, 0))^\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.2 Nous avons la même chose avec la fonction $f_{\mu,\delta}$ définie par :

$$f_{\mu,\delta}(t) := \varphi(4t) |t|^\mu (-\log |t|)^{-\delta}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. Dans le cas des espaces de Besov, il est vrai que $f_{\mu,\delta} \in B_{p,q}^{s,loc}(\mathbb{R})$ si et seulement si $s < \mu + \frac{1}{p}$ ou $s = \mu + \frac{1}{p}$ et $s < \frac{1}{q}$: voir [5].

Il existe d'autres exemples de fonctions f telle que $f \circ g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, $\forall g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, nous donnons les références [10], [8].

3.3 Autres exemples

- Pour la fonction $f(t) = t^m$, $m = 2, 3, \dots$, on a

Théorème 3.3.1 *Supposons que $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\|g^m\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}^m.$$

Preuve. Voir [10, page 312]. ■

Remarque 3.3.1 *Nous rappelons que $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si on a :*

$$s > \frac{n}{p} \text{ ou } s = \frac{n}{p} \text{ et } 0 < q \leq 1.$$

Si $m = 2$, alors

$$\|g^2\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}^2.$$

Ce qui donne

$$\|f \cdot g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

- Considérons maintenant la fonction $f_\mu(t) = |t|^\mu$, $\mu > 1$.

Théorème 3.3.2 *Supposons que $0 < s < \mu$ alors*

$$\||g|^\mu\|_{B_{p,q}^\mu} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s} \|g\|_\infty^{\mu-1}, \forall g \in B_{p,q}^s \cap L_\infty.$$

Preuve. Voir [10, page 364]. ■

Remarque 3.3.2 *Le théorème 3.3.2 reste vrai si on remplace f_μ par la fonction $\tilde{f}_\mu(t) = t|t|^{\mu-1}$, ce qui donne*

$$\||g|^{\mu-1}\|_{B_{p,q}^\mu(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \|g\|_\infty^{\mu-1}.$$

- Considérons maintenant la fonction $f_\mu(t) = |t|^\mu$, $\mu < 1$.

Théorème 3.3.3 *Supposons que $0 < s < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, alors*

$$\| |g|^\mu \|_{B_{\frac{p}{\mu}, \frac{q}{\mu}}^{\mu s}(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}^\mu, \quad \forall g \in B_{p,q}^s \cap L_\infty.$$

Preuve. Voir [10, page 365]. ■

Corollaire 3.3.1 *Supposons que $0 < s < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, alors*

$$\| |g|^\mu \|_{B_{\frac{p}{\mu}, \frac{q}{\mu}}^{\mu s}(\mathbb{R})} \leq c(1 + |\sup p(g)|)^{\frac{1-\mu}{p}} \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}^\mu, \quad \forall g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \text{ à support compact.}$$

Preuve. Voir [10, page 366]. ■

Bibliographie

- [1] G. Bergh, J. Löfström. Interpolation Theory. An Introduction, Springer, Berlin, 1976.
- [2] G. Bourdaud and Y. Meyer, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev, J. Functional Anal 97, 351 – 360 (1991).
- [3] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, **23**, 1995.
- [4] G. Bourdaud. A sharpness result for powers of Besov functions. J. Funct. Spaces Appl. 2 (2004), 267-277.
- [5] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel, Towards sharp superposition theorems in Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Nonlinear Anal. 68, 2889–2912 (2008)
- [6] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. Composition operators acting on Besov spaces on the real line. Annali Mat. P. A. 193 (2014), 1519-1554.
- [7] B. Jawerth. Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Math. Scand. 40, (1977), 94–104.
- [8] D. Kateb. On the boundedness of the mapping $f \mapsto |f|^\mu, \mu > 1$, on Besov Spaces, Math. Nachr. 248–249 (2003) 110–128.
- [9] J. Peetre. New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976.
- [10] T. Runst, W. Sickel. Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations, de Gruyter, Berlin, 1996.

- [11] W. Sickel. Boundedness properties of the mapping $f \rightarrow |f|^\mu$, $0 < \mu < 1$ in the framework of Besov spaces, unpublished manuscript.
- [12] H. Triebel. Theory of Function Spaces, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [13] H. Triebel. Theory of Function Spaces, II, Birkhäuser, Basel, 1992.